Ideas de los problemas

15/01/21

1. Esto es semejanza de triángulos. ($l = \frac{6}{3\sqrt{2}+1}$)

2. Elijo dos puntos cualesquiera, me fijo en la circunferencia con centro el centro de la esfera y que pasa por ambos puntos. Por el principio del palomar de los otros tres puntos al menos dos caerán en la misma semicircunferencia cerrada.

3. Sea T el triángulo de mayor área, considera una homotecia de centro el baricentro y razón -2. Esta claro que ningún punto queda fuera de este nuevo triángulo.

4. Por AM-HM ó CBS

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 4$$

Se sigue el aserto, la igualdad se da cuando $a = \frac{1}{2} = b$.

5. Por la desigualdad generalizada de las medias queda $LHS \geq \frac{10^{10}}{3^9}$. Ya sabemos cuando hay igualdad ;)

6. Supongamos que existe un tal polinomio. Considerando $Q(x) := P(x-k) - 5$, también mónico con coeficientes enteros, y aplicando lo que sabemos de polinomios con coeficientes enteros tenemos que $\{a,b,c,d\} = \{-3,-1,1,3\}$. Tenemos que $Q(x) = (x^4 - 10x^2 + 9)C(x)$, con $C \in \mathbb{Z}[x]$ por ser el divisor mónico. Pero entonces $3 = Q(0) = 9C(0)$, contradicción.

7. Por CBS queda

$$(x+y+1+z+1)^{\frac{1}{2}}(1+2+3)^{\frac{1}{2}} \geq \sqrt{x} + \sqrt{2y+2} + \sqrt{3z+3}$$

Luego $\sqrt{30}$ es el máximo, que se alcanza en $(x,y,z) = (\frac{5}{6}, \frac{4}{6}, \frac{9}{6})$.

8. Supongamos contradictoriamente que es imposible y elijamos una configuración con el máximo de habitaciones buenas. Consideremos una habitación mala, elijamos una bombilla cualquiera b_1 y mientras podamos creamos recursivamente una cadena de bombillas $b_1, b_2, b_3, \ldots$ tal que b_{2i-1} y b_{2i} son hermanas a través del interruptor i y b_{2j} y b_{2j+1} son bombillas de distinto color en sus respectivas habitaciones, la habitación j.

En cada paso todas las bombillas de la habitación j menos b_{2j} son de color contrario a esta, mientras no repitamos habitación, pues si no en tal momento pulsando los interruptores $1, \ldots, j$ tenemos mas habitaciones buenas, contradicción.

Luego seguimos añadiendo habitaciones hasta que no podamos añadir mas, en tal momento o bien tenemos una cadena de habitaciones distintas tales que la primera y la última no están, y entonces al pulsar todos los interruptores añadimos dos habitaciones buenas (o una si es la misma habitación) o bien entramos en algún momento en una habitación en la que ya hemos estado, como hemos entrado por hermandad se sigue que hemos entrado en esta habitación con un color distinto y la cadena acaba aquí. Igualmente pulsamos todos los interruptores y ya está, añadimos una habitación.

9. Hay 10^{18} combinaciones (a, b, c) en las condiciones del enunciado si añadimos que $a, b, c \geq 0$. Sus valores están entre 0 y $(10^6 - 1)(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$, que es menor que 5×10^6. Luego habrá dos de ellas a una distancia de $\frac{1}{2} \times 10^{-11}$. Su diferencia es una combinación que cumple el aserto.

10. Equivalente a $43 \times 47(a + b) = 3ab$. Gracias a la simetría dividimos por casos:

- $a = 2021r$

  Entonces $2021r + b = 3br$, de donde $r|b$ y por tanto $b = rk$. Queda $2021 = (3r - 1)k$. De donde $(r, k) = (674, 1)$ o $(16, 43)$.

- $a = 43r$ y $b = 47s$

  Entonces $43r + 47s = 3rs$, y $s|43r$, de donde $s|r$, pues si no es el caso anterior, y entonces $r = sk$. Queda $43k + 47 = 3sk$, de donde $k|47$ y entonces $k = 1$, pues si no es análogo al caso anterior. Queda $r = 30 = s$.

Y las soluciones son pues $(a, b) = (2021 \times 674, 674), (2021 \times 16, 43 \times 16), (43 \times 30, 47 \times 30)$. Ahora si pensamos en la condición $a < b$ y le damos la vuelta si es necesario.

11. Supongamos que no. Entonces considerando una triangulación cualquiera del plano por triángulos equiláteros de lado 1 vemos que dos puntos cualesquiera a distancia 3 habrían de ser del mismo color. Contradicción pues las circunferencias de radio 3 con centro en $(0, 0)$ y $(1, 0)$ se cortan.

12. Sea $P(x, y)$ el aserto

$$f(x^2 + y) = f(f(x) - y) + 4f(x)y$$

Entonces $P(x, -x^2)$ y $P(x, f(x))$ nos dan

$$f(x)(f(x) - x^2) = 0$$

- **Caso 1.** Si existe $a \neq 0$ tal que $f(a) = 0$.

  Sea $x \notin \{0, a^2\}$ tal que $f(x) \neq 0$, entonces $P(a, -x)$ no se verifica.

  Pero entonces $f(-2a) = 0$ y por el mismo razonamiento si $x \notin \{0, 4a^2\}$ tal que $f(x) \neq 0$, entonces $P(a, -x)$ no se verifica. Luego $f(a^2) = 0$ también.

  Y queda como solución
$$f(x) = 0$$

- **Caso 2.** Entonces
$$f(x) = x^2$$

13. Queremos ver la primera cifra en la siguiente cadena

$$5^{2019} \to 5^{2018} \to \cdots \to 5^2 \to 5^1$$

Dividir entre 5 es multiplicar por 2 y eliminar la última cifra, vamos a partir esta cadena en pequeñas cadenas que empiezan por el dígito 1.

Veamos que hay dos cadenas posibles de primeras cifras que se obtienen al multiplicar por 2:´

$$C1 : 1 \to 2, 3 \to 5, 6, 7 \to 1$$

$$C2 : 1 \to 2 \to 4 \to 8, 9 \to 1$$

Cada $C1$ tiene longitud 3 y baja 2 dígitos, cada $C2$ tiene longitud 4 y baja 3 dígitos. Tenemos $3C1 + 4C2 = 2019$ y $2C1 + 3C2 = 1412$. Luego $C1 + C2 = 2019 - 1412 = 607$ es la cantidad de unos.

14. Observando la igualdad en $\mathbb{Z}_4$ queda que $n = 2m$. Tenemos que

$$3^{4m} < 3^{4m} + 12m^2 + 7 \leq 3^{4m} + 2 \times 3^{2m} + 1 = (3^{2m} + 1)^2$$

donde la desigualdad no estricta se da pues

$$2m^2 + 1 \leq 3^{2m-1}$$

para $m \in \mathbb{N}$. La expresión solo es un cuadrado en el caso de igualdad, $n = 2$.

15. Operando

$$\begin{aligned}
d_n &= \gcd(a_n, a_{n+1}) \\
&= \gcd(n^2 + 10, n^2 + 2n + 11) \\
&= \gcd(n^2 + 10, 2n + 1) \\
&= \gcd(2n^2 + 20, 2n + 1) \\
&= \gcd(-n + 20, 2n + 1) \\
&= \gcd(n - 20, 41) \in \{1, 41\}
\end{aligned}$$

El mayor valor es 41, se alcanza para cualquier número que sea 20 en $\mathbb{Z}_{41}$.

16. Sea $t := x - y$. Queda $2(t+y)^2 + (t+y) = 3y^2 + y$ y operando

$$t(2t + 4y + 1) = y^2$$

Además

$$\gcd(t, 2t + 4y + 1) = \gcd(t, 4y + 1) = 1$$

donde la última igualdad se da pues si un primo divide a t también divide a y y no dividirá por tanto a $4y + 1$.

Luego tenemos que t y $2t + 4y + 1$ son cuadrados perfectos. Para la última consideremos $t = r^2$, $2t + 4y + 1 = s^2$ entonces $y = rs$ y es fácil ver que $(r+s)^2 = r^2 + 2rs + s^2 = 3t + 6y + 1$.

17. Pensemos en la sucesión módulo N y fijémonos en los pares

$$(F_0, F_1), (F_1, F_2), \ldots, (F_n, F_{n+1}), \ldots$$

Como la cantidad de pares posibles es finita tal sucesión tendrá dos elementos iguales, digamos $(F_a, F_{a+1}) = (F_b, F_{b+1})$ con $a < b$, tirando hacia atrás obtenemos $F_0 = F_{b-a}$.

18. Sea $P(x, y)$ el aserto

$$(x + y^2)f(yf(x)) = xyf(y^2 + f(x))$$

$P(1, 0)$ nos da $f(0) = 0$.

- **Caso 1.** Existe $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $f(a) = 0$.
  Sea $x > 0$. Entonces $P(a, \sqrt{x})$ da $f(x) = 0$.
  - **Caso 1.1.** Existe $b > 0$ tal que $f(-b) > 0$.
    Entonces $P(-b, \frac{-b}{f(-b)})$ da

    $$1 + \frac{-b}{f(-b)^2} = 0$$

    y queda $f(-b) = \sqrt{b}$.
    Pero entonces sea $-b \neq x < 0$ entonces $P(-b, \frac{x}{f(-b)})$ da

    $$f(x) = 0$$

    Y es fácil comprobar que la aplicación

    $$f(x) = \begin{cases} \sqrt{b}, & \text{si } x = -b \\ 0, & \text{si } x \neq -b \end{cases}$$

    es solución al problema.

- **Caso 1.2.** Existe $b > 0$ tal que $f(-b) < 0$.
  Entonces $P(-b, \frac{b}{f(-b)})$ da

$$f\left(\frac{b^2}{f(-b)^2} + f(-b)\right) = 0$$

  luego $P(-b, \frac{-b}{f(-b)})$ da

$$-1 + \frac{b}{f(-b)^2} = 0$$

  y queda $f(-b) = -\sqrt{b}$.
  Pero sea $-b \neq x < 0$ entonces $P(-b, \frac{x}{\sqrt{b}})$ da

$$f\left(\frac{x^2}{b} + f(-b)\right) = 0$$

  luego $P(-b, \frac{-x}{\sqrt{b}})$ da

$$f(x) = 0$$

  Y es fácil comprobar que la aplicación

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{b}, & \text{si } x = -b \\ 0, & \text{si } x \neq -b \end{cases}$$

  es solución al problema.

- **Caso 1.3.** No existe $b > 0$ tal que $f(-b) \neq 0$.
  Y es fácil comprobar que la aplicación

$$f(x) = 0$$

  es solución al problema.

- **Caso 2.** No existe $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $f(a) = 0$.
  Sea $x > 0$. Entonces $P(-x, \sqrt{x})$ da

$$f(x + f(-x)) = 0$$

  Y queda $f(-x) = -x$. Luego $P(-(x^2 + \frac{1}{4}), x + 1)$ da $f(x) = x$.
  Y es fácil comprobar que la aplicación

$$f(x) = x$$

  es solución al problema.